

**מבחן טרימסטר א' במתמטיקה**

משך המבחן 3 שעות. יש לפתור את כל השאלות!  
 אין להשתמש במחשבוני! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!  
בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה בכל הניתן!  
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!  
יש לפתור את שאלות 1 ו-6 רק באמצעות גיאומטריה-המישור.  
כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים – חייב הוכחה!  
תזכורת! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!

- שאלה 1 – 14%  
 משולש ABC חסום במעגל בעל רדיוס R. דרך קדקוד A מעבירים קוטר AD וגובה AE.  
 7% א. הוכח ( ללא טריגונומטריה )  $AE = \frac{AC \cdot AB}{2R}$   
 7% ב. הוכח ש-  $\angle EAD = |\angle ABC - \angle ACE|$

- שאלה 2 - 16%  
 8% א. פתור:  $\sqrt{0.5(x^2 - 9x + 22)} \geq x - 5$   
 8% ב. הוכח שאין m כזה כך שלמשוואה  $(5m-2)x^2 + 2\sqrt{10}(1+m)x = 5-2m$  יהיו שני פתרונות חיוביים שמכפלתם קטנה מ-1.

- שאלה 3 – 14%  
 8% א. שרטט את גרף הפונקציה  $y = \frac{2|x-5|+13}{|x-5|+3}$   
 6% ב. עבור אילו ערכים של m למשוואה  $x^2 - 10x + m = \frac{2|x-5|+13}{|x-5|+3}$  יש שני פתרונות? (2) יש פתרון אחד? (3) אין פתרונות?  
 (1) יש שני פתרונות?

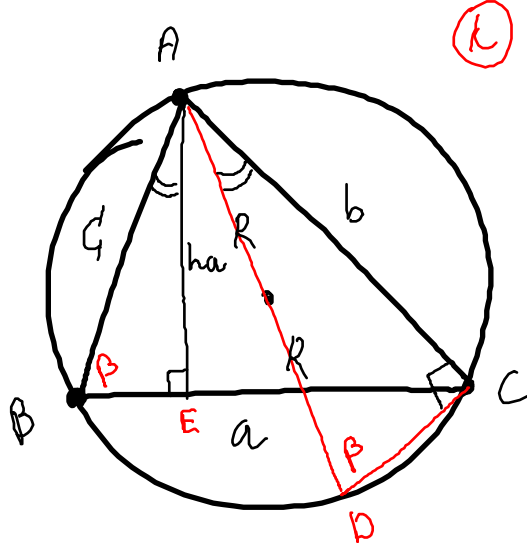
- שאלה 4 – 20%  
 10% א. פתור:  $2^{4x} - 7 \cdot 4^x \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} \geq 0$   
 10% ב. איזה משני המספרים הבאים גדול יותר  $\sqrt{15}$  או  $8^{\frac{1}{3} \log_2(1-\frac{1}{32}) + 2 \log_{27} 3}$ ?

- שאלה 5 – 16%  
 6% א. פתור:  $\frac{\sqrt{x-2}-x}{2-x} \geq \frac{4}{5}$   
 10% ב. שרטט את גרף הפונקציה  $y = \log_3 \frac{x+1}{x} + \log_9 x^2$ . נמק כל שלב.

- שאלה 6 – 18%  
 9% א. צלעות המשולש ABC מקימות  $AB:AC:BC=3:4:5$ . חשב את היחס בין שטח העיגול החסום במשולש לשטח העיגול החוסם את המשולש.  
 9% ב. שני מעגלים משיקים זה לזה היצונית בנקודה M. על מעגל אחד בוחרים שתי נקודות A ו-B. המשך הקטע AM חותך את המעגל השני בנקודה C. המשך הקטע BM חותך את המעגל השני בנקודה D. הוכח:  $AB \parallel CD$ .

בהצלחה!

→ Skw  
↑



(k)

$$\Delta ABE \sim \Delta ADC \quad (S.S)$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DC} = \frac{AE}{AC}$$

||

$$AE = \frac{AB \cdot AC}{AD}$$

↓

$$h_a = \frac{b \cdot c}{2R}$$

(j)

$$S = \frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

2 → 1/2

(k)

$$\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 - 9x + 22)} \geq x - 5$$

$$x^2 - 9x + 22 \geq 0$$
$$\Delta = 81 - 88 < 0$$

x 5

$$x - 5 < 0$$

$$x < 5$$

1/2

(k)

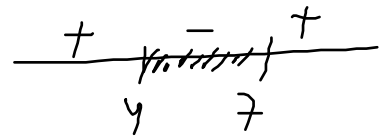
$$x - 5 \geq 0 \quad x \geq 5$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - 9x + 22) \geq x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 9x + 22 \geq 2x^2 - 20x + 50$$

$$0 \geq x^2 - 11x + 28$$

$$0 \geq (x - 7)(x - 4)$$



$$4 \leq x \leq 7$$

⇓

$$5 \leq x \leq 7$$

$$x \leq 7$$

0/10

2)  $\Delta \geq 0$   
 $\hat{?}$

$$(5m-2)x^2 + 2\sqrt{10}(1+m)x + 2m-5 = 0$$

$a \neq 0$

$m \neq \frac{2}{5}$

$\Delta > 0$

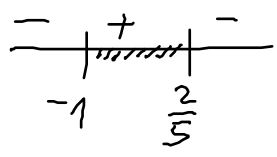
~~$4 \cdot 10(1+m)^2 - 4 \cdot (5m-2)(2m-5) > 0$~~   
 ~~$10 + 20m + 10m^2 - 10m^2 + 29m - 10 > 0$~~

$49m > 0$

$m > 0$

$-\frac{b}{a} > 0$

$\frac{m+1}{2-5m} > 0$



$-1 < m < \frac{2}{5}$

$0 < \frac{c}{a} < 1$

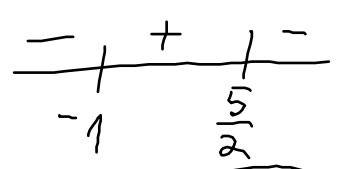
$0 < \frac{2m-5}{5m-2}$   
 $+$   $-$   $+$   
 $\frac{2}{5}$   $\frac{5}{2}$   
 $m < \frac{2}{5} \quad || \quad m > \frac{5}{2}$

$\frac{2m-5}{5m-2} < 1$

$\frac{2m-5-5m+2}{5m-2} < 0$

$\frac{-3m-3}{5m-2} < 0$

$\frac{m+1}{2-5m} < 0$

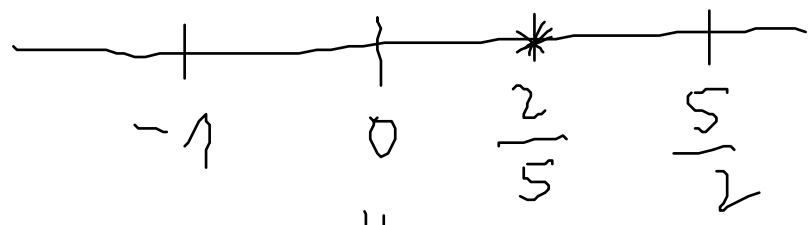
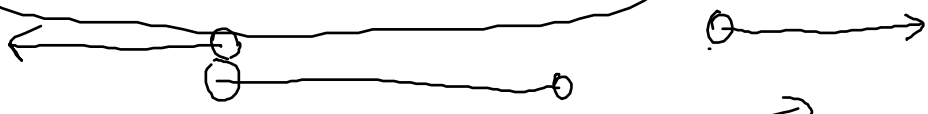


$|| \quad m > \frac{5}{2}$   
 $m < -1$

$\hat{?}$   $\Delta \geq 0$

$|| \quad m > \frac{5}{2}$   
 $m < -1$

$m \neq \frac{2}{5}$   
 $m > 0$   
 $-1 < m < \frac{2}{5}$   
 $m < -1 \quad || \quad m > \frac{5}{2}$



$|| \quad m > \frac{5}{2} \quad || \quad m < -1$

3)  $\sqrt{K}$

$$y = \frac{2|x-5|+13}{|x-5|+3}$$

$$\begin{aligned} |x-5|+3 &\neq 0 \\ x &\neq 5 \end{aligned}$$

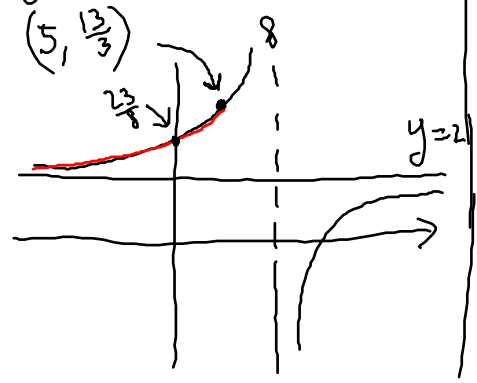
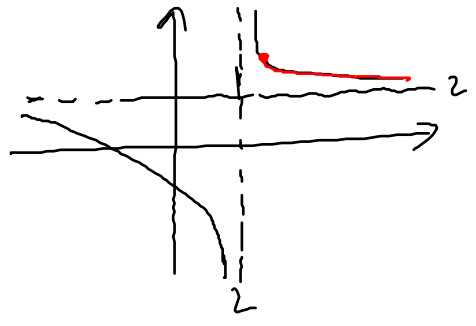
$x \leq 5$

$x > 5$

$$y = \frac{2(5-x)+13}{5-x+3}$$

$$y = \frac{2(x-5)+13}{x-5+3} = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$y = \frac{23-2x}{8-x}$$



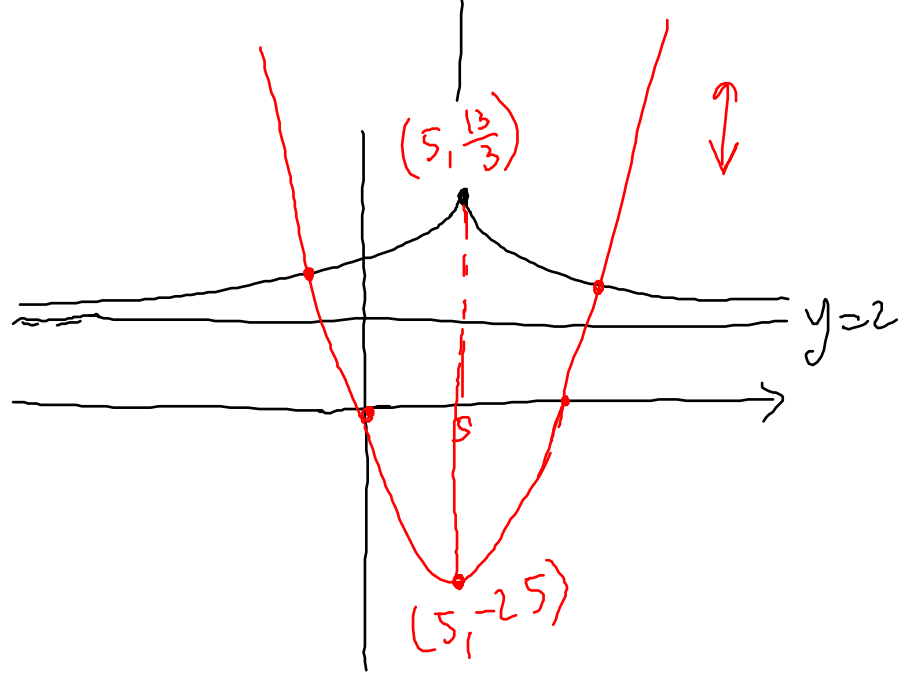
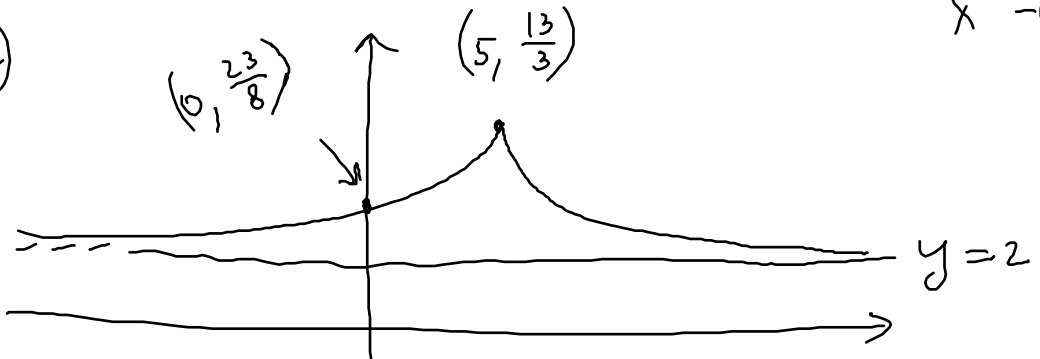
$$x^2 - 10x + m$$

②

$$x^2 - 10x$$

- (0,0)
- (10,0)
- (5,-25)

①



②

$$m = 25 + \frac{13}{3} = 29\frac{1}{3} \quad \text{②}$$

$$25 + 4\frac{1}{3} = 29\frac{1}{3}$$

$$m > 29\frac{1}{3} \quad \text{③}$$

$$m < 29\frac{1}{3} \quad \text{①}$$

4. 1782e  
k

$$2^{4x} - 7 \cdot 2^{2x} \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 3^{2x} \cdot \frac{1}{3} \geq 0$$

$$3^x = t \quad 2^{2x} = k$$

$$k^2 - \frac{7}{3} t k + \frac{4}{3} t^2 \geq 0$$

$$3k^2 - 7kt + 4t^2 \geq 0$$

$$3k^2 - 3kt - 4kt + 4t^2 \geq 0$$

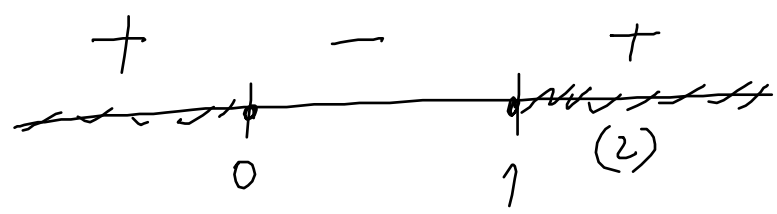
$$3k(k-t) - 4t(k-t) \geq 0$$

$$(k-t)(3k-4t) \geq 0$$

$$(3 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 3^x)(2^{2x} - 3^x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{2x} &= 4 \cdot 3^x \\ 2^{2x-2} &= 3^{x-1} \\ (2^2)^{x-1} &= 3^{x-1} \\ \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^0 \\ \boxed{x=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{2x} &= 3^x \\ 4^x &= 3^x \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x &= \left(\frac{4}{3}\right)^0 \\ \boxed{x=0} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{ll} \quad &x \geq 1 \\ &x \leq 0 \end{aligned}$$

$$(3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 3^2)(2^4 - 3^2)$$

475ke  
1/2

$$8 \left( \frac{1}{3} \log_2 \left( 1 - \frac{1}{32} \right) + 2 \log_{27} 3 \right)$$

$$\frac{1}{3} \log_2 \left( \frac{31}{32} \right)$$

$$\frac{1}{3} (\log_2 31 - \log_2 32)$$

$$\frac{1}{3} (\log_2 31 - 5)$$

$$8 \cdot (2 \log_{27} 3)$$

$$2 \cdot \log_{27} 3 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$8 \cdot \frac{1}{3} (\log_2 31 - 5)$$

$$\log_2 31 - 5$$

2

$$\frac{2 \log_2 31}{2^5} = \frac{31}{32}$$

$$\frac{31}{32} \cdot 4 = \frac{31}{8}$$

$$\frac{31}{8}$$

$$31 < 8\sqrt{15}$$

$$31^2 < 64 \cdot 15$$

$$961 < 960$$

$$\sqrt{15}$$

$$31^2 = 961$$

$$64 \cdot 15 = 960$$

$$960$$

1 < 3

$$> \sqrt{15}$$

s.e.n

$\frac{5 \sqrt{x+2}}{2-x}$

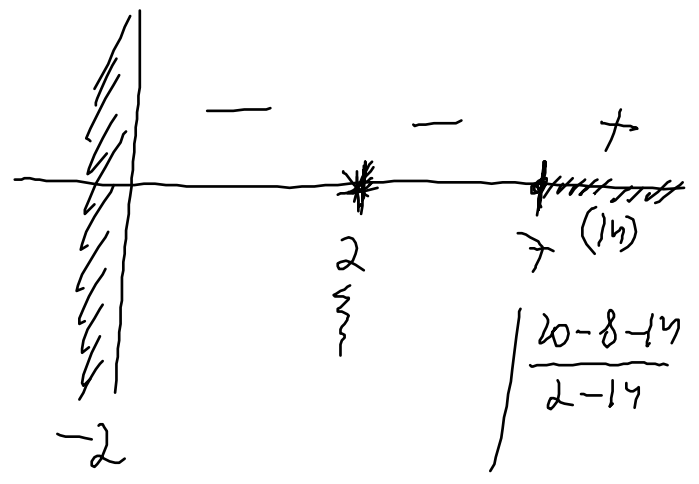
$$\frac{\sqrt{x+2} - x}{2-x} \geq \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{l|l} x+2 \geq 0 & 2-x \neq 0 \\ x \geq -2 & x \neq 2 \end{array}$$

$$\frac{5\sqrt{x+2} - 5x - 8 + 4x}{5(2-x)} \geq 0$$

$x \neq 2 \rightarrow \frac{5\sqrt{x+2} - 8 - x}{2-x} \geq 0$

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x+2} &= 8+x \\ 25(x+2) &= 64 + 16x + x^2 \\ 25x + 50 &= 64 + 16x + x^2 \\ x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ (x-2)(x-7) &= 0 \\ x=2 & \quad x=7 \end{aligned}$$



10/0  $x \geq 7$



5 → 5/2  
1/2

$$\log_3 \frac{x+1}{x} + \log_9 x^2 = y$$

$$\frac{x+1}{x} > 0 \quad | \quad x^2 > 0$$

$$\frac{+}{-} \frac{-}{+}$$

$$\frac{-}{-} \frac{+}{+}$$

$$-1 \quad 0$$

$$x \neq 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\frac{\log_9 \left( \frac{x+1}{x} \right)}{\log_9 3} + \log_9 x^2 = y$$

1/2 →

$$2 \log_9 ( ) + \log_9 ( ) = y$$

$$\log_9 ( )^2 + \log_9 ( ) = y$$

$$\log_9 \left( \left( \frac{x+1}{x} \right)^2 \cdot x^2 \right) = y$$

$$\log_9 (x+1)^2 = y$$

$$2 \log_9 |x+1| = y$$

$$x > -1$$

$$2 \log_9 (x+1)$$

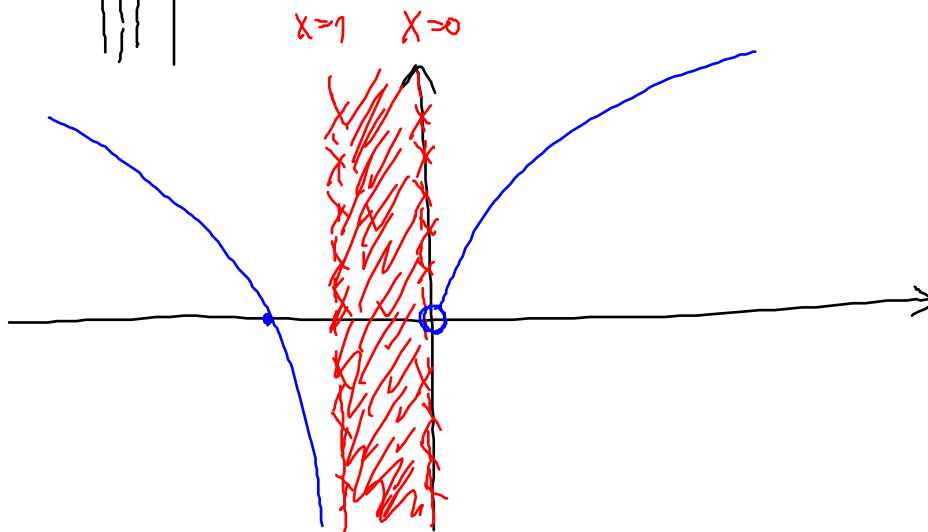
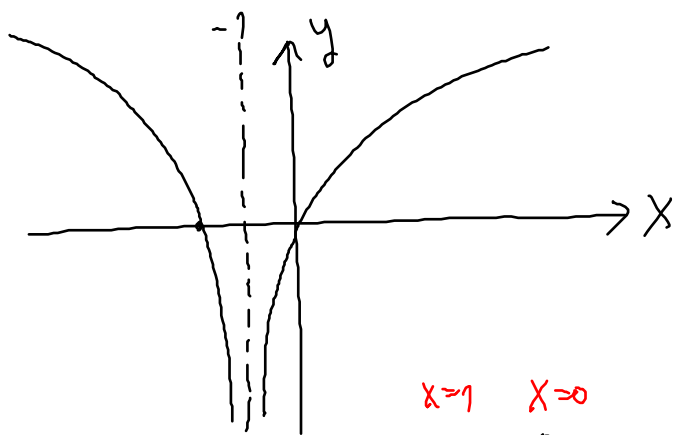
$$x < -1$$

$$2 \log_9 (-x-1)$$

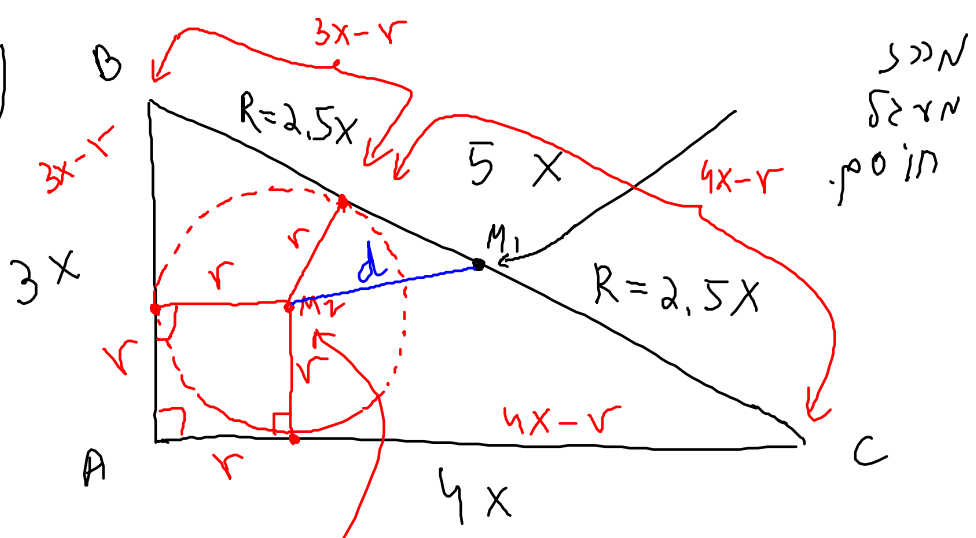
$$2 \log_9 (x-1) = 0$$

$$9^0 = -x-1$$

$$x = -2$$



75 ke  
6



5x N  
5x N  
point

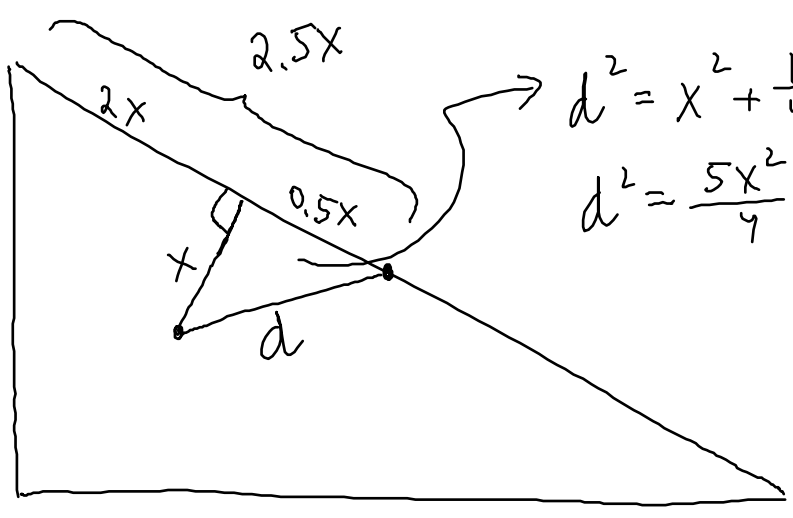
$$3x - r + 4x - r = 5x$$

$$7x - 5x = 2r$$

$$2x = 2r$$

$$\boxed{x = r}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{2.5x}{x} = \boxed{2.5}$$



$$d^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^2$$

$$d^2 = \frac{5x^2}{4}$$

0 > 1/2 r

$$d = \frac{\sqrt{5}x}{2}$$

$$\frac{d}{r} = \frac{\frac{\sqrt{5}x}{2}}{x} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$